

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# حسابان کسری

## مفاهیم و کاربردها

تالیف و گردآوری

خسرو سایوند

(عضو هیات علمی دانشگاه ملایر)

فاطمه ارجنگ

سرشناسه	:	سایوند، خسرو، ۱۳۵۵ -
عنوان و نام پدیدآور	:	حسابان کسری: مفاهیم و کاربردها/ خسرو سایوند، فاطمه ارجنگ.
مشخصات نشر	:	ملایر: دانشگاه ملایر، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری	:	۵۶۴ص.
شابک	:	978-622-7187-03-8
وضعیت فهرست نویسی	:	فیبا
موضوع	:	مشتق گیری -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	Fractional calculus -- Study and teaching (Higher)
شناسه افزوده	:	ارژنگ، فاطمه، ۱۳۶۲-
شناسه افزوده	:	دانشگاه ملایر
شناسه افزوده	:	Malayer University
رده بندی کنگره	:	QA۲۱۴
رده بندی دیویی	:	۵۱۵/۸۳۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی	:	۶۳۱۱۸۳۳
وضعیت رکورد	:	فیبا



ناشر:	انتشارات دانشگاه ملایر
عنوان کتاب:	حسابان کسری: مفاهیم و کاربردها
تالیف و گردآوری:	خسرو سایوند - فاطمه ارجنگ
نوبت چاپ:	اول ۱۳۹۹
شمارگان:	۱۰۰۰
چاپ و صحافی:	تایماز
قیمت:	۱۳۵۰۰۰ تومان
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۷۱۸۷-۰۳-۸

حق چاپ محفوظ و متعلق به انتشارات دانشگاه ملایر می باشد.

# پیشگفتار

«به نام آنکه هستی نام از او یافت  
فلک جنبش زمین آرام از او یافت  
به نام آنکه تن را نور جان داد  
خرد را سوی دانایی عنان داد»

سپاس و ستایش خداوند بلندمرتبه را سزد که به لطف بیکرانش توفیق تألیف و تدوین کتاب حاضر، حاصل آمد. کتاب پیش‌رو، حاصل تلاش نویسندگان بمنظور تدوین و تألیف دانسته‌های خود و تجربیات سایر نگارندگان، در راستای بهبود و گسترش نظریه‌ی حسابان کسری در ایران و به زبان فارسی است. اگرچه مراجع علمی معتبر و قوی، مرتبط با موضوع حسابان کسری، در بسیاری از نقاط دنیا نگاشته شده‌اند، اما تدوین و تألیف مجموعه‌ای کامل، چندبعدی و مطابق با دانسته‌های بروز بشری به زبان فارسی، همواره مورد نیاز دانشجویان و پژوهشگران علاقمند به این شاخه از ریاضیات بوده و لذا این کتاب، کوشیده است تا با رفع این خلأ موجود، مجموعه‌ای کامل از اطلاعات مرتبط را در اختیار دانشجویان و پژوهشگران رشته‌های ریاضی، فیزیک، زیست، مهندسی مکانیک، مهندسی برق و غیره در مقاطع تحصیلات تکمیلی و تا حدودی کارشناسی قرار دهد تا بتوانند با خانواده‌ای گسترده از اصول حاکم بر نظریه جذاب و ریشه‌دار حسابان کسری آشنا شده و برخی کاربردهای این علم جدید را ملاحظه نمایند. همانگونه که در تمامی منابع مرتبط با موضوع حسابان کسری بیان شده، آغاز پیدایش این نظریه را می‌توان در مکاتبات رد و بدل شده میان لایب‌نیتز، برنولی و هوپیتال جستجو نمود. مکاتباتی که در طی سالیان بعد، توجه بسیاری از ریاضیدانان و محققان را به خود جلب کرده و منجر به ظهور شاخه‌ی جدیدی از آنالیز ریاضی، تحت عنوان حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری شد. پژوهش‌های انجام گرفته در زمینه‌ی حسابان کسری، در تمامی سال‌های پس از پیدایش آن، نه تنها در جهت معرفی اصول موضوعه و مفاهیم پایه‌ی این نظریه‌ی گسترده حرکت کرده، بلکه با شناخت کاربرد وسیع آن در علوم کاربردی و طبیعی، سعی در ارائه‌ی نظریه‌ها و مدل‌های کسری مرتبط و همچنین حل این مسائل کسری داشته است. در راستای تأیید این سخن می‌توان گفت که امروزه، پروژه‌های بی‌شماری که توسط گروه‌های تحقیقاتی در برخی از مراکز معتبر و متخصص، در مطالعه‌ی علوم و مهندسی توسعه یافته‌اند، پدیده‌های غیرعادی را با استفاده از ابزاری تحت عنوان معادلات دیفرانسیل کسری مدل‌بندی می‌کنند. کتاب، مشتمل بر چهار بخش است که با یک رویکرد کل به جزء تدوین شده است. به این ترتیب که در بخش اول، چارچوب و حدود نظریه‌ی حسابان کسری تبیین شده و در بخش‌های بعدی، چگونگی عملکرد این موضوع بر روی معادلات دیفرانسیل از نوع معمولی و جزئی و نیز کاربردهای

آن در علوم طبیعی و صنعت مورد بحث قرار گرفته است. بخش اول این کتاب در چهار فصل، جهت معرفی مفاهیم پایه و اصول موضوع حسابان کسری و ارائه‌ی روش‌های عددی برای تقریب عملگرهای انتگرال‌گیری و دیفرانسیل‌گیری کسری طراحی شده است. در شروع این بخش و در فصل اول از کتاب، ابتدا به معرفی و آنالیز فضای حسابان کسری پرداخته و سپس، با توابع ویژه‌ی مورد استفاده در تعریف عملگرهای کسری آشنا خواهیم شد. با توجه به اینکه برای انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از مرتبه‌ی کسری، تعاریف متعددی وجود دارند، لذا قسمتی از این فصل را به معرفی انواع عملگرهای کسری اختصاص داده و برخی ویژگی‌های مرتبط با هر کدام از این تعاریف را ارائه داده‌ایم. در قسمت پایانی این فصل، بخشی تحت عنوان سیر تاریخی پیدایش و توسعه‌ی حسابان کسری گنجانده شده است. مطالب این قسمت نیز شامل معرفی ریاضیدانانی است که از ابتدای پیدایش نظریه‌ی حسابان کسری تاکنون، به پژوهش در این زمینه پرداخته و در راستای معرفی انواع عملگرهای انتگرالی و دیفرانسیلی کسری و آنالیز فضای حسابان کسری، فعالیت‌هایی مؤثر انجام داده‌اند. از آنجا که در کنار تعریف عملگرهای ریاضیاتی جدید، بحث‌های مربوط به تعبیر فیزیکی و هندسی مرتبط با آنها در راستای بیان کاربردهای این عملگرها در علوم طبیعی و صنعت نیز مطرح می‌شوند، لذا در فصل دوم، به ارائه‌ی مطالبی پرداختیم که در آنها تعبیر فیزیکی و هندسی عملگرهای انتگرالی و دیفرانسیلی کسری بیان می‌شوند. مهمترین ویژگی عملگرهای کسری در مقایسه با عملگرهای کلاسیک، مشخصه‌ی غیرموضعی بودن آنهاست که از این ویژگی نیز در فصل سوم سخن به میان آمده است. مطالب این بخش با فصل چهارم به پایان می‌رسد که در آن به معرفی برخی روش‌های موجود در تقریب عملگرهای کسری پرداخته و فرمول‌های مربوط به گسسته‌سازی این عملگرها آورده شده است. از موارد مطرح شده در این فصل، در حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری، در بخش‌های بعدی، استفاده می‌گردد. در بخش دوم از کتاب که شامل دو فصل است، با معرفی معادلات دیفرانسیل معمولی کسری، ابتدا به بیان برخی قضایای مرتبط با شرایط وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل کسری در فصل پنجم پرداخته و سپس با ارائه‌ی روش‌های عددی در حل تقریبی این دسته از معادلات در فصل ششم، این بخش را به پایان می‌رسانیم. از آنجا که در ساختار فرمول‌بندی بسیاری از مسائل در مهندسی و علوم، معادلات دیفرانسیل جزئی کسری ظاهر می‌شوند، لذا بخش سوم از کتاب با شش فصل را به این دسته از معادلات اختصاص داده‌ایم. این بخش را با معرفی انواع معادلات دیفرانسیل جزئی کسری در فصل هفتم آغاز کرده و در ادامه، دو دسته‌ی مهم از این معادلات که شامل معادلات موج و انتشار کسری هستند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. دو روش تحلیلی حل مسائل کسری شامل روش تبدیلات لاپلاس و روش بسط توابع ویژه نیز به ترتیب در فصل‌های نهم و دهم از کتاب معرفی شده و برای حل مسائلی به‌عنوان نمونه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. خاطرنشان می‌کنیم که غیرموضعی بودن عملگرهای کسری، به‌عنوان یکی از چالش‌های اصلی در بحث معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، منجر به محاسبات هزینه‌بر می‌شود، یعنی در روند به‌دست آوردن جواب عددی، استفاده از حافظه‌ی بالا مورد نیاز خواهد بود. زیرا در صورت استفاده از مشتق کسری زمانی، ذخیره کردن تمام اطلاعات از ابتدا (از زمان شروع محاسبات) لازم است و در صورت استفاده از مشتق کسری مکانی، اغلب با ماتریس‌های چگال سر و کار خواهیم داشت. بنابراین موضوع هزینه‌ی محاسباتی در حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری، از موضوعات بسیار مهم در این زمینه است. البته در بررسی حل عددی معادلات کسری، پرداختن به موضوعاتی شامل مسائل با بُعد بالا، روش‌های ضمنی، روش‌های مرتبه‌ی بالاتر و مسائل مرتبه‌ی متغیر نیز باعث بروز محاسبات هزینه‌بری خواهند شد که این هزینه‌ی محاسباتی وابسته به حافظه‌ی مورد استفاده مربوط به منابع محاسباتی خواهند

بود. این مسأله، به‌ویژه برای مسائل کسری زمانی نمایان‌تر می‌باشند و در برخی موارد، تنها ابرکامپیوترهای خیلی قوی می‌توانند حافظه‌ی بالای مورد نیاز در حل عددی مسائل کسری را تأمین کنند. از این رو، در طول سال‌های گذشته، قسمتی از پژوهش‌های انجام گرفته بر روی موضوع حسابان کسری، به استفاده از روش‌های عددی مناسب و قابل قبول در حل معادلات کسری اختصاص یافته که بتواند در مقایسه با سایر روش‌ها، نتایج بهتری را ارائه داده و از طرفی چالش‌های موجود در زمینه‌ی هزینه‌ی محاسباتی را تا حد ممکن برطرف کنند. در این راستا، در قسمتی از این کتاب به معرفی و بررسی برخی روش‌های عددی مورد استفاده در حل معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته‌ایم، که شامل روش‌های تفاضلات متناهی در فصل یازدهم و روش‌های تغییراتی در فصل دوازدهم خواهند بود. علاوه بر معرفی هر کدام از این روش‌ها در فصل‌های مربوطه، مثالهایی از مسائل کسری مطرح شده و با روش‌های مذکور، حل گردیده‌اند. سعی بر این بوده تا خواننده بتواند ضمن آشنایی با این روش‌ها، با بهره‌گیری از مطالب بیان شده در فصل‌های چهارم و ششم، ابزارها و ایده‌های مناسبی را جهت تعمیم این روش‌ها و یا ترکیب آنها با یکدیگر در اختیار داشته باشد تا بتواند با ارائه‌ی روش‌های جدید، مبادرت به حل بهتر و به‌دست آوردن تقریب‌های مناسب‌تر از جواب‌های مسائل کسری نماید. در نهایت پس از معرفی حسابان کسری، مسائل دیفرانسیلی و روش‌های حل آنها، به بیان برخی کاربردهای این نظریه در بخش چهارم می‌پردازیم که بیان این مباحث در فصل‌های سیزدهم، چهاردهم و پانزدهم از کتاب گنجانده شده است. فصل‌های سیزدهم و چهاردهم از کتاب تحت عناوین حساب تغییرات کسری و مسائل کنترل بهینه‌ی کسری، به بیان مباحثی پیرامون این موضوعات می‌پردازند. در راستای توصیف بهتر، مسائلی نیز به‌عنوان نمونه در نظر گرفته شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در فصل پانزدهم نیز به بیان کاربردهای حسابان کسری در علوم کاربردی و طبیعی اشاره شده و سعی بر آن بوده تا علاوه بر بیان گستردگی کاربردها، خواننده با منابعی که در این زمینه وجود دارند، بیشتر آشنا گردد. امید است این کتاب بتواند سهمی هر چند اندک در مسیر توسعه‌ی نظریه‌ی حسابان کسری داشته باشد. نویسندگان اذعان دارند که کتاب حاضر، همانند هر اثر علمی، عاری از ضعف و قوت نیست و به گرمی از پیشنهاد‌های منتقدان و خوانندگان عزیز برای برجسته‌سازی نقاط قوت، کاهش و حذف نقاط ضعف و در نهایت بهبود کیفیت کتاب از طریق آدرس [ksayehvand@malayeru.ac.ir](mailto:ksayehvand@malayeru.ac.ir) استقبال می‌نمایند. در پایان از گروه ریاضی و دانشکده علوم ریاضی و آمار، مدیریت و معاونت محترم پژوهشی، حوزه انتشارات و سایر همکاران مرتبط دانشگاه ملایر، داوران محترم که با توصیه‌ها و نقدهای سازنده خود به ارتقا سطح کمی و کیفی کتاب افزودند و نیز خانم‌ها راضیه عرفانی‌فر و نسیم قنبری که در بازخوانی نهایی کتاب همکاری صمیمانه داشته‌اند نهایت تقدیر و تشکر به‌عمل می‌آید.

خسرو سایوند

فاطمه ارجنگ

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر

خرداد ماه ۱۳۹۹





# فهرست مطالب

xi	اول نظریه‌ی حسابان کسری
۱	۱ حسابان کسری
۲	۱.۱ آنالیز فضای حسابان کسری
۱۲	۲.۱ توابع ویژه‌ی حسابان کسری
۱۲	۱.۲.۱ تعمیم تابع فاکتوریل از حسابان کلاسیک به حسابان کسری
۱۷	۲.۲.۱ تعمیم تابع نمایی از حسابان کلاسیک به حسابان کسری
۲۲	۳.۲.۱ تعمیم توابع مثلثاتی از حسابان کلاسیک به حسابان کسری
۲۴	۳.۱ معرفی انواع انتگرال‌ها و مشتقات کسری
۶۳	۴.۱ سیر تاریخی پیدایش و توسعه‌ی حسابان کسری
۷۹	۲ تعابیر هندسی و فیزیکی عملگرهای کسری
۸۰	۱.۲ تعبیر هندسی از انتگرال‌گیری کسری: سایه‌های روی دیوارها
۸۳	۱.۱.۲ پتانسیل ریس
۸۵	۲.۱.۲ پتانسیل فلر
۸۵	۲.۲ دو نوع زمان: دیدگاه اول
۸۹	۱.۲.۲ تعبیر فیزیکی انتگرال اشتیلیس
۸۹	۲.۲.۲ تعبیر فیزیکی انتگرال‌گیری کسری: سایه‌های گذشته
۹۰	۳.۲.۲ تعبیر فیزیکی مشتق کسری ریمان‌لیوویل
۹۱	۴.۲.۲ تعبیر فیزیکی مشتق کسری کاپوتو
۹۱	۳.۲ دو نوع زمان: دیدگاه دوم
۹۲	۴.۲ تعبیر هندسی و فیزیکی انتگرال پیچشی ولترا
۹۵	۳ مشتقات کسری و غیرموضعی بودن
۹۷	۱.۳ اصول غیرموضعی بودن برای مشتقات کسری

۲.۳	مثال‌های کاربردی از اصول غیرموضعی	۹۸
۱.۲.۳	مشتق کسری سازگار	۹۹
۲.۲.۳	مشتق کسری متناوب	۱۰۰
۳.۲.۳	مشتق $M$ -کسری	۱۰۰
۴.۲.۳	مشتق کسری موضعی	۱۰۱
۵.۲.۳	مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو	۱۰۲
۴	تقریب‌های عددی برای انتگرال‌ها و مشتقات کسری	۱۰۵
۱.۴	تقریب عددی انتگرال‌های کسری	۱۰۵
۲.۴	تقریب عددی مشتقات کسری	۱۱۲
۳.۴	روش ماتریسی در گسسته‌سازی عملگرهای کسری	۱۲۸
۴.۴	سایر روش‌های گسسته‌سازی عملگرهای کسری	۱۳۰
دوم	معادلات دیفرانسیل معمولی کسری	۱۳۵
۵	شرایط وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل معمولی کسری	۱۳۷
۱.۵	شرایط وجود و یکتایی جواب معادلات کسری با عملگر ریمان‌لیوویل	۱۳۸
۲.۵	شرایط وجود و یکتایی جواب معادلات کسری با عملگر کاپوتو	۱۴۹
۳.۵	جواب‌های تقریباً همانند در معادلات دیفرانسیل کسری	۱۵۵
۴.۵	پایداری معادلات دیفرانسیل کسری	۱۶۲
۱.۴.۵	پایداری دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری خطی متغیر	۱۶۲
۲.۴.۵	پایداری دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری کنترل‌ناپذیر	۱۶۳
۵.۵	معادلات دیفرانسیل کسری چندمرتبه‌ای و جواب عددی آنها	۱۶۸
۱.۵.۵	نظریه خطی	۱۷۱
۲.۵.۵	مسأله‌ی غیرخطی	۱۷۳
۳.۵.۵	یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی	۱۸۱
۶	روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری	۱۸۷
۱.۶	روش‌های مستقیم	۱۸۸
۲.۶	روش‌های انتگرال‌گیری	۱۹۰
۱.۲.۶	روش‌های اویلر کسری	۱۹۰
۳.۶	روش‌های چندگامی خطی کسری	۲۰۴

۲۱۹	سوم معادلات دیفرانسیل جزئی کسری
۲۲۱	۷ مسائل دیفرانسیلی جزئی کسری
۲۳۱	۸ معادلات موج و انتشار کسری
۲۳۱	۱۰.۸ تفسیر فیزیکی پدیده‌ی انتشار کسری
۲۳۸	۲۰.۸ سیر تحقیقاتی در زمینه‌ی معادلات انتشار کسری
۲۴۵	۳۰.۸ جواب تحلیلی معادلات موج-انتشار کسری
۲۵۳	۹ جواب مسائل مقدار اولیه کسری با تبدیل لاپلاس
۲۶۱	۱۰ جواب مسائل مقدار اولیه-مرزی کسری با بسط توابع ویژه
۲۶۱	۱۰.۱۰ بسط توابع ویژه در مسائل مقدار مرزی
۲۶۸	۲۰.۱۰ مسأله‌ی مقدار اولیه-مرزی کسری
۲۷۳	۱۱ روش تفاضلات متناهی در حل مسائل کسری
۲۷۳	۱۰.۱۱ روش تفاضلات متناهی
۲۷۹	۲۰.۱۱ معادله‌ی انتشار کسری زمان
۲۸۹	۳۰.۱۱ معادله‌ی انتشار کسری مکان
۲۹۲	۴۰.۱۱ معادله‌ی وزش کسری مکان
۲۹۶	۵۰.۱۱ معادلات انتشار وزش کسری
۳۰۵	۶۰.۱۱ مروری کوتاه بر تاریخچه‌ی استفاده از روش تفاضلات متناهی
۳۰۹	۱۲ روش‌های تغییراتی در حل معادلات دیفرانسیل کسری
۳۱۶	۱۰.۱۲ روش‌های تغییراتی
۳۳۸	۱۰.۱۱۲ مثلث‌بندی و حجم‌های کنترلی روی یک دامنه
۳۳۹	۲۰.۱۱۲ روند گسسته‌سازی در روش‌های عددی
۳۴۰	۲۰.۱۲ روش اجزای محدود
۳۴۵	۱۰.۲۰۱۲ فضای خطی متناهی‌البعد از توابع تعریف شده بر روی یک بازه
۳۵۶	۲۰.۲۰۱۲ معادله‌ی انتشار کسری زمانی و روش اجزای محدود
۳۶۸	۳۰.۲۰۱۲ روش حجم محدود
۳۶۹	۳۰.۱۲ روش اجزای حجم محدود
۳۷۲	۱۰.۳۰۱۲ معادله‌ی انتشار کسری زمانی مرتبه‌ی دوم و روش اجزای حجم محدود
۳۸۱	۲۰.۳۰۱۲ بررسی و تحلیل خطای روش اجزای حجم محدود

۳۹۵	چهارم کاربردهای نظریه‌ی حسابان کسری
۳۹۷	۱۳ حساب تغییرات کسری
۳۹۹	۱۰۱۳ اصول و تعاریف اولیه حساب تغییرات کسری
۴۰۷	۲۰۱۳ حل مسائل حساب تغییرات کسری
	۱۰۲۰۱۳ تعیین فرمول برای حالتی که نقاط انتهایی روی دو منحنی داده شده یا روی دو سطح واقع می‌گردند (معیارهای سنجش)
۴۱۴	
۴۲۱	۱۴ مسائل کنترل بهینه کسری
۴۲۲	۱۰۱۴ چندجمله‌ای‌های لژاندر و نظریه‌ی تقریب
۴۳۱	۲۰۱۴ حل مسائل کنترل بهینه کسری
۴۶۷	۱۵ کاربرد حسابان کسری در علوم کاربردی و پدیده‌های طبیعی
۴۶۸	۱۰۱۵ تأثیر غیرموضعی بودن در پدیده‌های طبیعی
۴۷۳	۲۰۱۵ نقش حسابان کسری در مدل‌بندی پدیده‌های زیستی
۴۷۴	۱۰۲۰۱۵ کاربردهای حسابان کسری در مدل‌بندی دستگاه تنفسی
۴۸۱	۲۰۲۰۱۵ کاربرد حسابان کسری بر روی دستگاه‌های زیستی
۴۸۷	۳۰۲۰۱۵ کاربرد حسابان کسری در مدل‌سازی انتشار دارو
۴۹۲	۴۰۲۰۱۵ حسابان کسری در علم اعصاب
۴۹۴	منابع
۵۴۴	نمایه